

09

Teorías escalares del campo electromagnético

En este capítulo se analiza los modelos de propagación de la ondas electromagnéticas en la guías de ondas y través de medios materiales, y las teorías escalares simplificadas empleadas para su estudio.

La teoría escalar de la eikonal ha jugado un papel fundamental en las teorías primitivas de la luz, ya que para las frecuencias ópticas es la base por la que se justifica el buen funcionamiento de los modelos mecanicistas de propagación de la óptica geométrica. Además, permite también predecir los fenómenos de interferencia y difracción de la luz, por lo que es un modelo que tiene en cuenta el doble comportamiento ondulatorio y corpuscular de la luz.

En el límite de frecuencias altas veremos que se recupera el principio de Fermat de la óptica geométrica.

Se analizará también la propagación de los rayos de luz en medios dispersivos, como pueden ser las fibras óptica o la atmosfera, y se introducirá la función de transmisión y el propagador en los sistemas ópticos.

Los modelos mecanicistas simplificados que se exponen en este capítulo para explicar la propagación de la luz emplean el concepto fenomenológico de índice de refracción, que se ha aplicado históricamente con gran éxito en el diseño de los sistemas ópticos; sin embargo, veremos en otro capítulo, que la interacción de la luz con la materia solo puede ser explicada de forma rigurosa mediante la teoría cuántica de la luz.

Cuando la luz se propaga en un material, se producen permanentemente estos fenómenos de absorción y reemisión de radiación. Sin embargo, veremos más adelante que los tratamientos se simplifican considerando que la luz se propaga de

forma continua con una velocidad v_f dependiente del índice de refracción $v_f = c/n = \sqrt{\epsilon_0/\epsilon} c$.

La constante dieléctrica ϵ es una magnitud que se determina experimentalmente y es un buen modelo fenomenológico para simplificar los cálculos, pero los fenómenos reales en la naturaleza son mucho más complejos y requieren conocer la estructura atómica de la materia como ya veremos.

Muchas veces, nuestros formalismos son isomorfos con los comportamientos de la naturaleza, pero no hay que olvidar que son sólo modelos y simplificaciones conceptuales. Sin embargo, conocer cuáles son los límites reales de esos modelos no es fácil de determinar siempre a priori, y requiere que se pongan a prueba experimentalmente.

Componentes TM y TE. Guías de onda

El vacío donde no hay fuentes, las ecuaciones de Maxwell viene dadas por

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= c \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\ c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \partial_t \vec{E}\end{aligned}$$

Esto nos sugiere que se puede expresar $\vec{E}$ como el rotacional de un campo vectorial. Existen dos posibilidades que definen los modos TE y TM .

$$\begin{aligned}\vec{E}_{TE} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{a}_{TE} \psi_{TE}) \\ \vec{B}_{TM} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{a}_{TM} \psi_{TM})\end{aligned}$$

donde $\vec{a}_{TE}$, $\vec{a}_{TM}$ son vectores unitarios y además ψ_{TE} , ψ_{TM} verifican la ecuación escalar de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\psi_{TE}, \psi_{TM}) = 0$$

Si consideramos ondas que se propagan

$$\psi_{TE,M} = \psi_{0TE,M} e^{i(k\vec{k}_u \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

entonces el laplaciano se puede descomponer en una componente en la dirección de propagación y otra en la transversal, con lo que será

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) (\psi_{TE}, \psi_{TM}) = 0$$

Para los modos TM , tomando para $\vec{a}_{TM} = \vec{e}_z$, el vector unitario en la dirección z , donde el campo eléctrico vendrá dado por

$$-\frac{i\omega}{c^2} \vec{E}_{TM} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{a}_{TM} \psi_{TM}) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (\vec{e}_z \psi_{TM}) - \nabla^2 (\vec{e}_z \psi_{TM}) = \vec{\nabla} \frac{\partial \psi_{TM}}{\partial z} + k^2 \vec{e}_z \psi_{TM}$$

De igual forma similar se obtienen los modos TE

$$i\omega \vec{B}_{TE} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{a}_{TE} \psi_{TE}) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (\vec{e}_z \psi_{TE}) - \nabla^2 (\vec{e}_z \psi_{TE}) = \vec{\nabla} \frac{\partial \psi_{TE}}{\partial z} + k^2 \vec{e}_z \psi_{TE}$$

Se llama guía de onda, a un medio en que se propaga un campo electromagnético limitado por una frontera en la que se imponen unas condiciones fijas en su superficie a los valores del campo.

Puesto que

$$\begin{aligned} \vec{E}_{TE} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{e}_z \psi_{TE}) = -\vec{e}_z \wedge \vec{\nabla} \psi_{TE} & y & \quad E_{TE}^z \equiv 0 \\ \vec{B}_{TM} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{e}_z \psi_{TM}) = -\vec{e}_z \wedge \vec{\nabla} \psi_{TM} & y & \quad B_{TM}^z \equiv 0 \end{aligned}$$

vemos que $\vec{E}_{TE}$ o $\vec{B}_{TM}$ son las soluciones adecuadas cuando se quieren imponer unas condiciones de contorno sobre las componentes tangenciales.

El problema de la guía de onda queda reducido a determinar la ecuación de ondas ψ_{TE} , ψ_{TM} con unos valores de frontera predeterminados.

305

En una guía de onda haciendo

$$k \vec{k}_u \cdot \vec{x} = k_z \quad y \quad \vec{x} = \vec{\rho} + z \vec{e}_z$$

la ecuación de ondas para

$$\psi_{TE,M} = \psi_{0TE,M}(\vec{\rho}) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

se puede descomponer de la forma

$$\left(\nabla_{\rho}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi_{TE,M} = \left(\nabla_{\rho}^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi_{TE,M} = 0$$

O también

$$\left(\nabla_{\rho}^2 + \frac{\omega_r^2}{c^2} \right) \psi_{0TE,M}(\vec{\rho}) = 0$$

siendo

$$\frac{\omega_r^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = k_r^2$$

Para que las ondas se puedan propagar en la dirección z , deberá ser k_z un número real, por lo que existirá una frecuencia mínima admisible, también llamada frecuencia de corte, definida por

$$\omega_c^2 = c^2 k_z^2$$

Si se impone sobre la superficie S de la guía de onda condiciones como

$$\vec{E}_{TM}(\vec{x}_S) \cdot \vec{e}_z = 0 \quad \text{o} \quad \vec{\nabla}_\perp \vec{B}_{TE}(\vec{x}_S) = 0$$

entonces $\psi_{TE,M}$ o también el potencial vector, de la guía de onda obedecerá una ecuación en valores propios, cuya solución se podrá desarrollar en función de un conjunto de funciones propias de la ecuación de Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega_r}{c} \right)^2 \right) u_r = 0 \quad k_r^2 = \left(\frac{\omega_r}{c} \right)^2$$

que forman una base ortonormal completa

$$\frac{1}{V} \int \vec{u}_r^* \cdot \vec{u}_s dV = \delta_{rs}$$

y con la condición auxiliar

$$\text{div } \vec{u}_r = 0$$

La solución general vendría representada por

$$\psi_{TE,M} = \frac{e}{\sqrt{V}} \sum_r (\vec{u}_r(\vec{x}) e^{-i\omega_r t} + \vec{u}_r^*(\vec{x}) e^{i\omega_r t})$$

Los valores propios ω_r vienen determinados por las condiciones de contorno que se impongan a las soluciones de la ecuación de Helmholtz.

El flujo de energía promediado en el tiempo viene dado por

$$2\mu_0 \langle \vec{S} \rangle = \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \text{Re}(\vec{E}_\perp \wedge \vec{B}_\perp^*) + \text{Re}(\vec{B}_z^* \vec{E}_\perp \wedge \vec{e}_z) + \text{Re}(\vec{E}_z \vec{e}_z \wedge \vec{B}_\perp^*)$$

y la densidad de energía promediada en el tiempo

$$\frac{4}{\epsilon_0} \langle w \rangle = \text{Re}(\vec{E} \cdot \vec{E}^* + c^2 \vec{B} \cdot \vec{B}^*) = \text{Re}(\vec{E}_\perp \cdot \vec{E}_\perp^* + E_z \wedge E_z^* + c^2 \vec{B}_\perp \cdot \vec{B}_\perp^* + c^2 B_z \wedge B_z^*)$$

Se define la potencia transmitida como el flujo de energía integrado en la sección de la guía de onda

$$P = \int_{S_\perp} \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{e}_z d^2 x_\perp$$

Para los modos TE es $E_{TE}^z \equiv 0$ con lo que se obtiene un modo ω_r

$$P_{rTE} = \frac{c}{2\mu_0} \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega} \right)^2} \int_{S_\perp} |B_{TE}^z|^2 d^2 x_\perp$$

De igual forma para un modo TM en que es $B_{TM}^z \equiv 0$

$$P_{rTM} = \frac{c\epsilon_0}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega} \right)^2} \int_{S_\perp} |E_{TM}^z|^2 d^2 x_\perp$$

La densidad de energía por unidad de longitud será

$$E_{r,TE,M} = \int_{S_\perp} \langle w \rangle d^2 x_\perp = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega} \right)^2}} P_{r,TE,M}$$

La velocidad de grupo para cada modo viene dada por

$$v_{rg} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega} \right)^2}$$

y por tanto

$$v_{rg} = \frac{P_{r,TE,M}}{E_{r,TE,M}}$$

Sin embargo, la velocidad de fase es la velocidad de la luz en el vacío

$$\vec{v}_f = \frac{\langle \vec{S} \rangle_{r,TE,M}}{\langle w \rangle_{r,TE,M}} = c \vec{e}_z$$

Por tanto, los modos se propagan en una guía de onda como ondas en un medio dispersivo

Propagación de la luz en medios estacionarios

Una de las propiedades de la propagación de luz en un medio material, es que la velocidad de fase tiene una dirección distinta de la de propagación de la energía del vector Poynting.

Consideremos en primer lugar un medio homogéneo no conductor. Si escribimos la ecuación de propagación del potencial vector como

$$\vec{A} = \vec{a} e^{i\omega \left(\frac{n}{c} \vec{k}_u \cdot \vec{x} - t \right)} + \vec{a}^* e^{-i\omega \left(\frac{n}{c} \vec{k}_u \cdot \vec{x} - t \right)}$$

donde

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$$

es el índice de refracción, y $\vec{s}$ un vector unitario en la dirección de propagación, y con la notación habitual

$$\vec{k}_u = \vec{k}/|\vec{k}|$$

La velocidad de fase de la onda es

$$\vec{v}_f = \frac{c}{n} \vec{k}_u$$

Las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético adoptan entonces la forma

$$\begin{aligned} \vec{e} &= i\omega \vec{a} & \vec{k}_u \cdot \vec{a} &= 0 \\ \vec{b} &= \frac{i\omega}{c} \vec{k}_u \wedge \vec{a} & \vec{k}_u \cdot \vec{b} &= 0 \\ \frac{n}{c} \vec{k}_u \wedge \vec{e} &= \vec{b} & \frac{n}{c} \vec{k}_u \wedge \vec{h} &= -\vec{d} \end{aligned}$$

308

Rescribiendo las ecuaciones

$$\vec{D} = -\frac{n}{c} \vec{k}_u \wedge \vec{H} = -\frac{n}{c\mu} \vec{k}_u \wedge \vec{B} = -\frac{n^2}{c\mu} \vec{k}_u \wedge \vec{E} \wedge \vec{k}_u = \varepsilon \vec{E}_\perp = i\varepsilon\omega \vec{a}_\perp$$

Puesto que $\vec{d}$ es ortogonal a $\vec{k}_u$ y coplanario con $\vec{e}$, $\vec{e}_\perp$ será también de $\vec{e}$ sobre $\vec{d}$.

En un material, $\vec{b} = \mu \vec{h}$ por lo que tienen la misma dirección.

Vemos que $\vec{d}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares a la dirección de propagación $\vec{k}_u$ de la onda y forman un triedro entre ellos.

El vector Poynting promediado en el tiempo será

$$\vec{S}_c = \vec{e} \wedge \vec{h}^* + \vec{e}^* \wedge \vec{h} = \frac{\omega^2 n}{\mu c} (\vec{a} \wedge \vec{k}_u \wedge \vec{a}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{k}_u \wedge \vec{a})$$

Definimos el vector unitario $\vec{s}_u$ en la dirección de propagación del vector Poynting

$$\vec{s}_u = \frac{\vec{S}_c}{|\vec{S}_c|}$$

Por tanto, $\vec{e}$ y $\vec{h}$ son perpendiculares a $\vec{s}_u$ y forman a su vez un triedro entre ellos.

Las densidades de energía eléctrica y magnética promediadas en el tiempo vienen dadas por

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{\vec{e} \cdot \vec{d}^* + \vec{e}^* \cdot \vec{d}}{2} = -\frac{n}{c} \frac{\vec{e} \cdot (\vec{k}_u \wedge \vec{h}^*) + \vec{e}^* \cdot (\vec{k}_u \wedge \vec{h})}{2} \\ &= \frac{n}{c} \frac{\vec{k}_u \cdot (\vec{e} \wedge \vec{h}^*) + \vec{k}_u \cdot (\vec{e}^* \wedge \vec{h})}{2} = \frac{n}{2c} \vec{s}_e \cdot \vec{k}_u \\ w_h &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{h}^* + \vec{b}^* \cdot \vec{h}}{2} = \frac{n}{c} \frac{(\vec{k}_u \wedge \vec{e}) \cdot \vec{h}^* + (\vec{k}_u \wedge \vec{e}^*) \cdot \vec{h}}{2} \\ &= \frac{n}{c} \frac{\vec{k}_u \cdot (\vec{e} \wedge \vec{h}^*) + \vec{k}_u \cdot (\vec{e}^* \wedge \vec{h})}{2} = \frac{n}{2c} \vec{s}_e \cdot \vec{k}_u \end{aligned}$$

y por tanto

$$w_e = w_h$$

La densidad de energía total será

$$w_c = w_e + w_h = \frac{n}{c} \vec{s}_e \cdot \vec{k}_u$$

Donde hemos eliminado los términos que se anulan al hacer una integración a todo el espacio.

Se define la velocidad de propagación de la energía como

$$\vec{v}_s = \frac{\vec{s}_e}{w_c}$$

Por tanto se verifica que

$$|\vec{v}_f| = |\vec{v}_s|(\vec{s}_u \cdot \vec{k}_u)$$

que nos dice que la velocidad de fase es la proyección de la velocidad de la energía en la dirección de propagación.

Es fácil comprobar también que

$$\frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{\vec{E}^2} = \frac{\varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}}{\vec{E}^2} = \frac{\varepsilon (\vec{k}_u \wedge \vec{E} \wedge \vec{k}_u) \cdot \vec{E}}{\vec{E}^2} = \vec{s}_u \cdot \vec{k}_u$$

Si puede definir un índice de refracción para la propagación de la energía

$$n_s = \frac{c}{|\vec{v}_s|} = n \vec{s}_u \cdot \vec{k}_u$$

De la ecuación de definición $\vec{v}_s$ se deduce que se verifica

$$\vec{s}_u = \omega_c \vec{v}_s = \frac{n}{c} \vec{s}_u \cdot \vec{k}_u \vec{v}_s = \frac{n_s}{c} \vec{v}_s \rightarrow \vec{v}_s = \frac{c}{n_s} \vec{s}_u$$

Definiendo $\vec{D}_\perp$ como la componente transversal a $\vec{S}_c$

$$\vec{D}_\perp = \vec{s}_u \wedge \vec{D} \wedge \vec{s}_u = \varepsilon \vec{s}_u \wedge \vec{E}_\perp \wedge \vec{s}_u = -\varepsilon \vec{s}_u \wedge \vec{k}_u \wedge \vec{E} \wedge \vec{s}_u \wedge \vec{k}_u = \varepsilon (\vec{s}_u \cdot \vec{k}_u)^2 \vec{E} = \varepsilon_0 n_s^2 \vec{E}$$

Consideremos ahora que el medio no es homogéneo y que el índice de refracción varía con la posición. En este caso escribiremos las ecuaciones del campo electromagnético de la forma

$$\vec{E} = \vec{e}(\vec{x}) e^{i(S_0(\vec{x}) - \omega t)} + \vec{e}^*(\vec{x}) e^{-i(S_0(\vec{x}) - \omega t)}$$

$$\vec{H} = \vec{h}(\vec{x}) e^{i(S_0(\vec{x}) - \omega t)} + \vec{h}^*(\vec{x}) e^{-i(S_0(\vec{x}) - \omega t)}$$

Las ecuaciones de Maxwell adoptan entonces la expresión

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{h} = -\frac{i\omega}{c} (\varepsilon \vec{e} + \vec{\nabla} S_0 \wedge \vec{h})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{e} = \frac{i\omega}{c} (\mu \vec{h} - \vec{\nabla} S_0 \wedge \vec{e})$$

$$\vec{e} \cdot \vec{\nabla} (L_n \varepsilon) + \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = -\frac{i\omega}{c} \vec{e} \cdot \vec{\nabla} S_0$$

$$\vec{h} \cdot \vec{\nabla} (L_n \mu) + \vec{\nabla} \cdot \vec{h} = -\frac{i\omega}{c} \vec{h} \cdot \vec{\nabla} S_0$$

En el límite de la óptica geométrica $\omega \rightarrow \infty$, las anteriores ecuaciones se simplifican a

$$\varepsilon \vec{e} + \vec{\nabla} S_0 \wedge \vec{h} = 0$$

$$\mu \vec{h} - \vec{\nabla} S_0 \wedge \vec{e} = 0$$

$$\vec{e} \cdot \vec{\nabla} S_0 = 0$$

$$\vec{h} \cdot \vec{\nabla} S_0 = 0$$

Si se elimina $\vec{h}$ se obtienen las ecuaciones

$$(\vec{e} \cdot \vec{\nabla} S_0) \vec{\nabla} S_0 - \vec{e} (\vec{\nabla} S_0)^2 + \varepsilon \mu \vec{e} = 0$$

$$\mu \vec{h} = \vec{\nabla} S_0 \wedge \vec{e}$$

$$(\vec{\nabla} S_0)^2 = n^2$$

En el límite óptico, el vector Poynting promediado en el tiempo tiene la dirección del gradiente de S_0

$$\vec{S}_c = \langle \vec{E} \wedge \vec{H} \rangle = v_f \langle \omega_c \rangle \frac{\vec{\nabla} S_0}{n} = \frac{c}{n} \varepsilon |\vec{e}|^2 \frac{\vec{\nabla} S_0}{n}$$

y sigue por tanto, la trayectoria de los rayos geométricos determinada por la ecuación de la eikonal

$$(\vec{\nabla} S_0)^2 = n^2$$

Por esta razón, veremos que para altas frecuencias como las ópticas, es posible aproximar la propagación del campo electromagnético en medios por una formulación escalar.

Dispersión de las ondas electromagnéticas

El que el corchete de Poisson $\{A^i, \Pi_A^i\}$ no se anule para la misma componente tiene un significado importante.

Su pongamos una dimensión y que es una magnitud $A(x, t)$ verifica la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

Desarrollando en ondas planas

$$A(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad \text{y} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

La condición inicial para $t = 0$ verificará

$$A(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ikx} dk$$

Es decir $A(x, 0)$ viene compuesta por una superposición lineal de ondas planas, que se denomina habitualmente como tren de ondas.

Invertiendo la anterior ecuación obtenemos

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, 0) e^{-ikx} dx$$

donde se ha hecho uso de la propiedad de la delta de Dirac

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k') f(k') dk' = f(k)$$

Es decir, conocida $A(x, 0)$, se calcula $a(k)$ por la transformada Fourier inversa, lo que no nos determina $A(x, t)$ para todo tiempo posterior.

Un teorema general de los desarrollos Fourier, nos dice que si Δx es la anchura por la que se extiende $A(x, 0)$ y Δk es la anchura de $a(k)$ entonces será

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

Es decir, si $\Delta k = 0$ como es el caso de una onda monocromática de una sola frecuencia, entonces el tren de ondas tiene una anchura infinita y nos encontramos en el caso de una onda plana que no tiene una localización específica en el espacio.

De igual forma si $\Delta x = 0$, es decir el tren de ondas $A(x, 0)$ está muy localizado en el espacio, entonces Δk es infinito y la onda está formada por infinitas ondas planas que toman todo el espectro de frecuencias.

Este teorema es importante, pues relaciona la anchura espacial de una onda con el ancho de su espectro en componentes de ondas planas. Además, la anchura Δx de la onda $A(x, t)$ crece con el tiempo y sólo es constante para una onda de tipo gaussiano, por lo que, en general una onda se va dispersando por el espacio con el tiempo.

Consideremos ahora un medio dispersivo en que

$$\omega = \omega(k)$$

Entonces

$$A(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

Para un medio dieléctrico con índice de refracción n constante per que depende de la frecuencia, deberá ser

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)} = kv_f(k)$$

Si hacemos un desarrollo en serie de $\omega(k)$ entorno a $k = k_0$ y nos quedamos con el término lineal

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega_0}{dk_0} (k - k_0)$$

Entonces

$$kx - \omega(k)t = kx + \left(\frac{d\omega_0}{dk_0} k_0 - \omega_0 \right) t - \frac{d\omega_0}{dk_0} kt = k(x - v_g t) + (v_g k_0 - \omega_0) t$$

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \frac{e^{i(v_g k_0 - \omega_0)t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ikx} dk = \frac{e^{i(v_g k_0 - \omega_0)t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ik(x - v_g t)} dk \\ &= A(x - v_g t, 0) e^{-i(v_g k_0 - \omega_0)t} \end{aligned}$$

habiéndose definido la velocidad de grupo como

$$v_g = \frac{d\omega_0}{dk_0} = \frac{c}{n(k_0)} - \frac{k_0 c}{n^2(k_0)} \frac{dn}{dk_0} = v_f - v_f^2 \frac{k_0}{c} \frac{dn}{dk_0}$$

o en función de la frecuencia

$$v_g = \frac{1}{\frac{dk_0}{d\omega_0}} = \frac{c}{n(\omega_0) + \omega_0 \frac{dn}{d\omega_0}}$$

Vemos que en este caso, $|A(x, t)|$ simplemente se desplaza sobre el eje x con una velocidad uniforme igual a la velocidad de grupo.

Consideremos el caso de una relación de dispersión de términos hasta segundo orden en $\omega(k)$

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega_0}{dk_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_0}{dk_0^2} (k - k_0)^2 = \omega_0 + v_g (k - k_0) + v_g'' (k - k_0)^2$$

y una onda inicialmente gaussiana

$$A(x, 0) = A_0 e^{-x^2/4\sigma^2} e^{ikx}$$

Sus componentes Fourier tendrán también una distribución gaussiana, ya que

$$a(k') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, 0) e^{-ik'x} dx = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} e^{ix(k-k')} dx = \sqrt{2}\sigma e^{-\sigma(k-k')^2}$$

Por tanto $A(x, t)$ vendrá dado por

$$A(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k') e^{i(k'x - \omega(k')t)} dk' = A_0 \frac{\sigma}{\Delta x} e^{-(x - v_g t)^2/4\sigma^2} e^{i(kx - \omega t)}$$

siendo

$$\Delta x^2 = \sigma^2 + i v_g'' t$$

$$|\Delta x| = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{v_g t}{\sigma^2}\right)^2}$$

En este caso, $|A(x, t)|$ vendrá dada por una distribución gaussiana que se propaga con la velocidad de grupo y que se va dispersando con el tiempo ensanchándose en función de $|\Delta x|$

$$|A(x, t)|^2 = \frac{A_0^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_g t}{\sigma^2}\right)^2}} e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{2\sigma^2 \left(1 + \left(\frac{v_g t}{\sigma^2}\right)^2\right)}}$$

Para calcular las integrales se ha hecho uso de la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} dx = 2\sqrt{\pi}\sigma$$

Rayos de luz y óptica geométrica. Eikonal óptica

En un medio con índice de refracción n , sabemos que las componentes del potencial vector con el gauge de Coulomb, verifican la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2(\vec{x})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A} = 0$$

Si suponemos que A es una onda de la forma

$$\vec{A} = \vec{a}_0(\vec{x}) e^{i(kS_0(\vec{x}) - \omega t)} + c.c$$

sustituyendo en la ecuación de ondas y separando la parte real de la imaginaria, se verificaran entonces las ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{a}_0 + \left(n^2(\vec{x}) - (\vec{\nabla} S_0)^2\right) k^2 \vec{a}_0 &= 0 \\ 2\vec{\nabla} S_0 \cdot \vec{\nabla} \vec{a}_0 + \nabla^2 S_0 \vec{a}_0 &= 0 \end{aligned}$$

que es la ecuación óptica de Fresnel para grandes frecuencias pequeñas o longitudes de ondas, que estudiaremos con detalle.

La longitud λ de onda se define como

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k = \frac{\omega}{c}$$

Si el índice de refracción varía poco en distancias comparables con la longitud de ondas

$$\frac{dn}{dx} \lambda \ll 1$$

Una aproximación para altas frecuencias (longitudes de onda cortas), es hacer la aproximación para S_0 de la ikonal óptica

$$(\vec{\nabla} S_0)^2 = n^2(\vec{x})$$

La condición de la divergencia nula del potencial vector, para cuando k es muy grande, hace que sea $\vec{\nabla} S_0$ perpendicular a $\vec{a}_0$, y por tanto, sea también ortogonal al campo eléctrico y al magnético

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \Rightarrow \vec{a}_0 \cdot \vec{\nabla} S_0 = 0$$

Las superficies de $S_0(\vec{x}) = \text{constante}$ definen las superficies del frente de onda de la óptica geométrica.

Los rayos ópticos geométricos tienen la dirección del vector unitario $\vec{k}_u$ ortogonal las superficies del frente de onda, y por tanto, en la dirección del gradiente de S_0

$$\vec{\nabla} S_0 = n \vec{k}_u$$

y se verificará entonces la ecuación

$$2n\vec{k}_u \cdot \vec{\nabla} \vec{a}_0 + \vec{a}_0 \cdot \vec{\nabla} (n\vec{k}_u) = 0$$

Denominamos por ds un desplazamiento en la dirección de la normal a las superficies del frente de ondas

$$ds = \vec{k}_u \cdot d\vec{x} = \frac{1}{n} \vec{\nabla} S_0 \cdot d\vec{x}$$

La penúltima ecuación se reescribirá entonces como

$$\frac{1}{a_0^i} \frac{da_0^i}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\vec{\nabla} \cdot (n\vec{k}_u)}{n}$$

o en forma integral

$$\vec{a}_0(s) = \vec{a}_0(s_0) e^{-\int_{s_0}^s \frac{1}{2} \frac{\vec{\nabla} \cdot (n\vec{k}_u)}{n} ds}$$

El módulo de $\vec{a}_0$, que veremos que juega un papel importante relacionado con el flujo de energía, se propaga a lo largo de un rayo geométrico como

$$|\vec{a}_0(s)|^2 = |\vec{a}_0(s_0)|^2 \vec{a}_0(s_0) e^{-\int_{s_0}^s \frac{\vec{\nabla} \cdot (n \vec{k}_u)}{n} ds}$$

El flujo de energía de la onda promediado por unidad de tiempo, viene dado por el vector de Poynting $\vec{S}_c$

$$\vec{S}_c = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{2}{\mu_0} k \omega |\vec{a}_0|^2 \vec{\nabla} S_0$$

y la densidad de energía promediada en el tiempo por

$$\omega_c = \epsilon \langle \vec{E}^2 \rangle = 2\epsilon \omega^2 |\vec{a}|^2 = \frac{2}{\epsilon_0} n^2 \omega^2 |\vec{a}|^2$$

por lo que el flujo de energía será entonces

$$\vec{S}_c(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0 \omega_c}{n^2(\vec{x})} \vec{\nabla} S_0(\vec{x}) e^{i(kS_0(\vec{x}) - \omega t)}$$

y a intensidad I del energía definida como la energía media por unidad de área y de tiempo

$$I = |\vec{S}_c| = \frac{\epsilon_0 \omega_c}{n^2(\vec{x})} |\vec{\nabla} S_0|$$

Como los rayos geométricos siguen las trayectorias que son ortogonales al frente de ondas definido por las superficies de fase constante $S_0(\vec{x}) = Cte$, debido a ello, una superficie de área A_1 del frente de ondas en un punto P_1 de la trayectoria, que se transforma en A_2 en otro punto P_2 de la misma trayectoria, verificaran que $I_1 A_1 = I_2 A_2$.

Para una onda esférica, esto nos indica que la intensidad decae con el cuadrado de la distancia.

Si se escribe

$$\vec{S}_c(\vec{x}) = \frac{I}{n(\vec{x})} e^{i(kS_0(\vec{x}) - \omega t)} \vec{\nabla} S_0(\vec{x})$$

y se toma la divergencia de $\vec{S}_c(\vec{x})$ e integra lo largo de la trayectoria de un rayo, se obtiene que entre dos puntos de esta se verifica la relación

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1} e^{-\int_{s_1}^{s_2} \frac{\vec{\nabla}^2 S_0 ds}{n}}$$

relación que se obtiene también directamente de la expresión de cómo se propaga $|\vec{a}_0(s)|^2$ a lo largo de la trayectoria de un rayo geométrico.

Si entre dos superficies del frente de onda constantes $S_0 = C$ y $S_0 = C + dC$, el rayo recorre ortogonalmente una distancia ds en un tiempo

$$dt = \frac{ds}{v_f} = \frac{n}{c} ds$$

Sobre la trayectoria de un rayo se verifica que

$$\vec{k}_u = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{\nabla} S_0}{n}$$

que es equivalente a

$$n \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{\nabla} S_0$$

Volviendo a derivar, la ecuación de las trayectorias de los rayos se puede escribir como

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n$$

Para n constante, las trayectorias son rectas. Para n variable como en el caso de una fibra óptica o en la atmósfera, la anterior ecuación nos define la trayectoria que siguen los rayos dentro de ella.

En la trayectoria de un rayo óptico, se verifica

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{k}_u) = \frac{1}{n} \vec{\nabla} S_0 \wedge \vec{\nabla} n = \frac{1}{n} \vec{k}_u \wedge \vec{\nabla} n \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}(\vec{k}_u^2) = 0$$

por lo que $\vec{k}_u$ variara a lo largo de la trayectoria de acuerdo con la expresión

$$\frac{d\vec{k}_u}{ds} = (\vec{k}_u \cdot \vec{\nabla}) \vec{k}_u = -\vec{k}_u \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{k}_u = \frac{1}{n} \vec{k}_u \wedge \vec{\nabla} n \wedge \vec{k}_u = \frac{\vec{\nabla} n}{n} - \left(\vec{k}_u \cdot \frac{\vec{\nabla} n}{n} \right) \vec{k}_u$$

La curvatura del rayo viene definida por el módulo $|d\vec{k}_u/ds|$.

La anterior ecuación junto con

$$\vec{k}_u = \vec{\nabla} S_0 / n$$

nos define la trayectoria de un rayo óptico en un medio dieléctrico no homogéneo.

En el caso de que exista una superficie $\Sigma(x, y) = 0$ de discontinuidad con diferentes índices de refracción n_- y n_+ a cada lado de ella, se verificará la ley de Snell

$$n_+ \vec{k}_{u+} \wedge \vec{n}_\Sigma = n_- \vec{k}_{u-} \wedge \vec{n}_\Sigma$$

donde $\vec{n}_\Sigma$ es la normal en un punto de la superficie de discontinuidad.

Además, puesto que

$$\vec{\nabla} \wedge (n\vec{k}_u) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} S_0 = 0$$

la integral de $n\vec{k}_u$ entre dos puntos en dos superficies de fase constante S será independiente del camino recorrido, lo que se conoce como óptico Δ_o , por lo que se verificará

$$\Delta_o = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla} S_0 \cdot d\vec{x} = \int_{P_1}^{P_2} n\vec{k}_u \cdot d\vec{x} ds = \int_{P_1}^{P_2} n ds$$

Sobre la trayectoria de los rayos $\vec{\nabla} S_0 \cdot d\vec{x} = n\vec{k}_u \cdot d\vec{x}$ es mínimo, lo que nos indica que debe haber algún tipo de principio variacional de la que proceden.

Principios variacionales de Fermat y de Jacobi

Mediante el cálculo variacional, se comprueba que la ecuación de la trayectoria de los rayos entre dos puntos fijos en el espacio, son las ecuaciones de Euler-Lagrange que hacen extremal la variación de la integral funcional de la eikonal

$$S_0 = \int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{P_1}^{P_2} n \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dl$$

donde τ es un parámetro que nos define la ecuación de la curva del rayo óptico, $x = (\tau)$, $\dot{x} = dx/dl$.

Esto es equivalente al principio de Fermat en que los rayos siguen las trayectorias en las que invierten el menor tiempo posible, ya que

$$S_0 = \int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{P_1}^{P_2} \frac{c}{v_f} ds = c \int_{P_1}^{P_2} dt$$

El principio variacional también se puede interpretar, como que las trayectorias son aquellas para las que el camino óptico es mínimo.

Esto demuestra también que las trayectorias de los rayos geométricos son las curvas geodésicas en un espacio de Riemann con la métrica

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = n^2(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Veremos que esta analogía es interesante cuando estudiemos las trayectorias en la relatividad general.

Si todo esto lo enlazamos con la analogía mecánica ya antes estudiada

$$\underset{\text{óptica}}{v_f = \frac{c}{n}} \leftrightarrow \underset{\text{mecánica}}{v_f = \frac{E}{\sqrt{2m_0(E-V)}}}$$

vemos que las trayectoria de una partícula en un sistema de energía constante sigue son también aquellas que hacen mínima la integral de la acción

$$S = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{2m_0(E-V)} ds$$

lo que se como conoce como el principio de mínima acción de Jacobi.

Ya anteriormente Hamilton había tratado de reducir el problema de determinar la trayectoria de una partícula en un potencial conservativo, a la propagación de un rayo óptico en un medio de índice de refracción variable.

El problema inverso, es lo que llevó a de Broglie y Schrödinger a la mecánica cuántica ondulatoria.

Mientras las superficies ópticas S_0 se propagan con el tiempo real en el espacio de coordenadas, la propagación de las superficies S no corresponde con el movimiento en tiempo real de una partícula, y la analogía es solo respecto a la forma y las trayectorias.

319

Función característica de Hamilton

La ecuación de la eikonal

$$(\vec{\nabla} S_0)^2 = n^2(\vec{x})$$

se pude resolver de forma análoga a la ecuación de Hamilton-Jacobi, haciendo

$$\beta_k = \frac{\partial S_0(\vec{x}, \alpha_k)}{\partial \alpha_k}$$

que despejando las x^k , se obtiene la solución general

$$\vec{x} = \vec{x}(\alpha_k, \beta_k)$$

Si hay dos medios con distintos índices de refracción, se puede aplicar de igual forma el principio de variacional Fermat, lo que nos lleva a las leyes Snell para refracción.

Si tomamos dos puntos de la trayectoria de un rayo $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$, y formamos la diferencia de la ikonal

$$\Delta S_0 = S_0(\vec{x}_1, \alpha_k) - S_0(\vec{x}_2, \alpha_k)$$

y hacemos

$$\frac{\partial \Delta S_0(\vec{x}, \alpha_k)}{\partial \alpha_k} = 0$$

resolviendo la ecuación para las α_k y sustituyéndolas en $S_0(\vec{x}, \alpha_k)$, obtenemos la ecuación característica de Hamilton

$$W_0 = S_0(\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

que verifica las ecuaciones

$$n(\vec{x}_1) \vec{k}_{1u} = \frac{\partial W_0}{\partial \vec{x}_1}$$

$$n(\vec{x}_2) \vec{k}_{2u} = -\frac{\partial W_0}{\partial \vec{x}_2}$$

$$(\vec{\nabla} W_0)^2 = n^2(\vec{x})$$

La función característica de Hamilton juega un papel fundamental en la teoría de los sistemas ópticos, y en las aplicaciones del principio de Huygens en la aproximación óptica cuando las longitudes de onda son pequeñas.

Principio de Huygens, Fresnel y Kirchhoff

La ecuación de la eikonal

$$(\vec{\nabla} S_0)^2 = n^2$$

para una onda

$$A = ae^{i(kS_0(\vec{x}) - \omega t)}$$

es equivalente al principio de Huygens, que dice que cada elemento de un frente de ondas se puede considerar como un centro secundario generador de ondas esféricas, y que además, la envolvente en cada instante de todas estas ondas secundarias es el frente de la onda que se propaga.

Como todos los puntos $\vec{x}_0$ de un frente de ondas se propagan de forma que para $S_0(\vec{x}_0) = C_1$ en t_1 y $S_0(\vec{x}_0) = C_2$ en t_2 recorren el mismo camino óptico

$$\Delta_0 = \int_{\vec{x}, S_0=C_1}^{\vec{x}, S_0=C_2} n \, ds$$

Es evidente que A' , definida como una onda esférica que parte de un punto $\vec{x}_0$ en $S_0(\vec{x}_0) = C_1$ en t_1 , verifica la ecuación de ondas

$$A'(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{a}{kn|\vec{x} - \vec{x}_0|} e^{i(kn|\vec{x} - \vec{x}_0| - \omega\Delta t)}$$

Si las superficies de la eikonal se propagan de forma paralela, en un medio homogéneo de n constante, entonces

$$A'(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{a}{\Delta_0} e^{i(k\Delta_0 - \omega\Delta t)}$$

y que por construcción, la envolvente de todas estas ondas parciales A' reconstruye el frente de ondas de $S_0(\vec{x}_0) = C_2$ de A .

La ecuación de la eikonal óptica es equivalente al principio de Huygens, aunque este es solo una aproximación a los fenómenos ópticos reales.

Este principio fue extendido por Fresnel y Kirchhoff con una formulación más rigurosa. Si A es una solución de la ecuación de Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) A = 0$$

y $G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', \omega)$ es la función de Green retardada que ya vimos en el capítulo de teorías espectrales, se verificará entonces

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (A \vec{\nabla} G_{1r}) &= \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} G_{1r} + A \nabla^2 G_{1r} \\ \vec{\nabla} \cdot (G_{1r} \vec{\nabla} A) &= \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} G_{1r} + G_{1r} \nabla^2 A \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones, y transformando la divergencia en una integral de superficie, obtenemos para un punto $\vec{x}$ interior a la superficie Σ

$$\oint_{\Sigma} (A \vec{\nabla} G_{1r} - G_{1r} \vec{\nabla} A) \cdot \vec{n}_2 \, d\Sigma = \int_V (A \nabla^2 G_{1r} - G_{1r} \nabla^2 A) \, d^3x = \int_V A \delta(\vec{x} - \vec{x}') \, d^3x' = A(\vec{x})$$

Reemplazando G_{1r} por

$$G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', \omega) = -\frac{e^{+i\frac{n\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

se obtiene el teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff

$$A(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left(A \vec{\nabla} \left(\frac{e^{+i\frac{n\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) - \frac{e^{+i\frac{n\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \vec{\nabla} A \right) \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma'$$

Esta ecuación fue el punto de partida de de Fresnel, Fraunhofer y Kirchhoff para desarrollar toda la teoría escalar de la difracción.

Si la superficie Σ es una pantalla opaca con una abertura $\Delta\Sigma$, la condición la que se impone sobre la superficie de la pantalla. Para un punto situado en la pantalla $\vec{x} \notin \Delta\Sigma$ se imponen las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} A(\vec{x}) &= 0 \\ \vec{\nabla} A(\vec{x}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} &= 0 \end{aligned}$$

Sobre la superficie $\Delta\Sigma$ de la abertura, si A_i es una onda que procede del exterior que incide sobre la pantalla, para un punto situado sobre la abertura $\vec{x} \in \Delta\Sigma$ se imponen las condiciones de continuidad

$$\begin{aligned} A(\vec{x}) &= A_i(\vec{x}) \\ \vec{\nabla} A(\vec{x}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} &= \vec{\nabla} A_i(\vec{x}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} \end{aligned}$$

Difracción en sistemas ópticos

El cálculo del campo electromagnético, cuando hay discontinuidades en el índice de refracción, lleva a ecuaciones integrales que hace que el cálculo de los procesos de difracción sea de difícil resolución, aun en el caso simple de una única superficie de refracción.

Excepto para el caso en que la superficie de refracción sea una superficie plana, es imposible resolver analíticamente dichas ecuaciones integrales para obtener una expresión explícita del campo electromagnético transmitido.

Un método muy empleado para determinar la distribución de amplitud compleja del campo transmitida por un sistema óptico ha sido el método de la función espesor, representando los sistemas ópticos por una función de transmisión, que expresa la transformación de fase que sufre la luz a su paso a través de ellos.

El método de la función espesor para el cálculo de la función de transmisión ha sido empleado con gran éxito en el campo de la óptica Fourier para sistemas de lentes. En el límite de la óptica geométrica $\lambda \rightarrow 0$, dichos métodos conducen a resultados que están de acuerdo con los predichos por la óptica geométrica.

En los últimos años se ha desarrollado con un creciente interés las posibilidades de transmisión óptica de información a través de guías de onda formadas por medios

dieléctricos.

La transmisión de impulsos ópticos modulados a través de fibras, ha sido el sistema de comunicación óptica que ha suscitado mayor atención. Sin embargo, se sabe desde hace tiempo que, según la óptica geométrica o el análisis modal, existe la posibilidad de transmitir imágenes paraxiales a través de un medio dieléctrico que tenga un índice de refracción con una dependencia radial cuadrática.

La calidad de transmisión de la imagen viene determinada por las características del proceso de difracción a través de medios con índice de refracción variable. La función de transmisión de una lente o de una fibra, en función de un índice de refracción general, es lo que determina las propiedades formadoras de imagen de los sistemas ópticos.

El cálculo de las principales propiedades de los sistemas ópticos, se reduce al problema de determinar la distribución de amplitud compleja difractada, por una o varias superficies de refracción arbitrarias que separen medios dieléctricos con distintos índices de refracción, cuando sobre dichas superficies incide un frente de ondas.

Existen tres métodos diferentes, aunque equivalentes, para determinar la distribución de amplitud compleja de un frente de ondas al atravesar una superficie arbitraria de refracción: el método de superposición, el método de la función de transmisión, y el método de la eikonal

a) Método de superposición

Basándose en principios generales de la teoría de difracción, Luneburg demostró que la distribución de amplitud compleja difractada por una superficie de refracción viene determinada por una representación integral que puede ser interpretada como la expresión del principio de superposición de Huygens. Según este principio, un frente de ondas plano o esférico, incidente sobre una superficie de refracción, se difractará en cada punto de dicha superficie en una onda plana, con la misma dirección que la del rayo geométrico refractado.

La distribución de amplitud compleja difractada en cada punto del espacio, vendrá dada por la superposición del conjunto de dichas ondas planas difractadas.

La generalización del principio de superposición, para el caso en el que, sobre una superficie de refracción incide un frente de ondas arbitrario, es inmediata en virtud de las leyes de refracción o de la posibilidad de descomposición espectral angular en ondas planas de cualquier frente de ondas.

Consideremos el sistema óptico representado por una superficie S_0 , que separa dos medios transparentes con distintos índices de refracción, n_1 y n_2 , y supongamos que, procedente del medio 1, denominado espacio objeto, la superficie de refracción es iluminada por un frente de ondas.

Determinar la distribución de amplitud compleja transmitida a través de una superficie S_0 al medio 2, denominado medio imagen, será el objeto de esta sección.

Debido a las altas frecuencias ópticas ($\omega \sim 10^{15} \text{s}^{-1}$), la magnitud de mayor interés para la óptica, es la intensidad I , definida como la energía media que cruza por unidad de tiempo la unidad de área del plano conteniendo los vectores eléctrico y magnético. Para las longitudes de onda ópticas, la intensidad I será proporcional al cuadrado del módulo de una determinada función escalar $a(r)$, denominada distribución de amplitud compleja, la cual verifica la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 a(\vec{x}) + k^2 n^2 a(\vec{x}) = 0$$

siendo $n = \frac{n_2}{n_1}$ y $k = k_0 n_2$ donde $\lambda = 2\pi/k_0$ es la longitud de onda del frente de onda incidente en el vacío.

Al ser el medio imagen un medio homogéneo, la distribución de amplitud compleja se propagará a través de éste de acuerdo con la ecuación espectral

$$A(\vec{x}) = -\frac{ik}{2\pi} \int a^*(p, q) e^{ik\phi(\vec{x}; p, q)} dp dq$$

siendo

$$\phi(\vec{x}; p, q) = \frac{1}{n_2} T(p, q; p, q) + px + qy + rz$$

$$a^*(p, q) = \sqrt{LN - M^2}$$

y estando definido

$$L - T_{pp} \equiv N - T_{pp} \equiv M - T_{rr} = -\frac{p^2 + q^2}{r^2} (pT_p + qT_q - T)$$

donde $T(p, q; p, q)$ es la llamada función angular de Hamilton y (p, q, r) designa los cosenos directores de un rayo geométrico del frente de ondas transmitido, y

$$\vec{n}_i = (p, q, r)$$

es la dirección de propagación del frente de ondas plano incidente.

Se supone que el origen de coordenadas se encuentra situado sobre un punto de la superficie de refracción S_0 y la dirección z se toma de forma que el plano $z = 0$ sea un plano tangente a S_0 .

El proceso de difracción por una superficie de refracción está determinada exclusivamente por la función de fase $n_2 \phi(\vec{x}; p, q)$, la cual puede ser identificada con el camino óptico entre los puntos Q_i y Q , determinados por las perpendiculares al rayo

geométrico incidente y al rayo refractado en la dirección (p, q, r) desde el origen de coordenadas y el punto de observación $\vec{x}$ respectivamente

$$n_2 \emptyset(\vec{x}; p, q) = n_1 \overline{Q_i Q} + n_2 \overline{P_s Q}$$

Entre la dirección $n_r(p, q, r)$ de los rayos geométricos refractados y los puntos $\vec{x}_0$ de S_0 , supondremos que existirá una dependencia funcional determinada por ecuación de la superficie S_0 de la forma

$$p = p(x_0, y_0) \quad q = q(x_0, y_0)$$

La función de fase $\emptyset$ se podrá reescribir como

$$\emptyset(\vec{x}; x_0, y_0) = n \vec{n}_i \cdot \vec{x}_0 + \vec{n}_r(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Donde $\vec{n}_r$ según la óptica geométrica será

$$\vec{n}_r(\vec{x}_0) = n \vec{n}_i + \beta(\vec{x}_0) \vec{n}_s(\vec{x}_0)$$

siendo $\vec{n}_s(\vec{x}_0)$ el vector normal a la superficie S_0 en un punto $\vec{x}_0$ de esta y $\beta(\vec{x}_0)$ está definido por

$$\beta(\vec{x}_0) = \sqrt{1 - n^2 + n^2(\vec{n}_s \cdot \vec{n}_i)^2} - n \vec{n}_s \cdot \vec{n}_i$$

En las anteriores ecuaciones, z_0 está determinado en función de $\vec{x}_0$, a través de la ecuación de la superficie de $S_0: z_0 = z_0(x_0, y_0)$.

Efectuando el cambio de variables de integración de p, q , a x_0, y_0 , la distribución de amplitud compleja difractada tomará la expresión

$$A(\vec{x}) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{S_0} a^*(x_0, y_0) e^{ik\emptyset(\vec{x}; x_0, y_0)} dx_0 dy_0$$

siendo la amplitud A^* proporcional al jacobiano J de la transformación de coordenadas

$$a^*(x_0, y_0) = J\left(\frac{p, q}{x_0, y_0}\right) a^*(p_0(x_0, y_0), q_0(x_0, y_0))$$

y por tanto es proporcional a la raíz cuadrada de la curvatura de Gauss de la superficie S en un punto (x_0, y_0, z_0) de ésta.

La ecuación para $a(\vec{x})$ puede ser interpretada como la expresión de un principio de superposición, en el que un frente de ondas incidente sobre una superficie de refracción S_0 , se refractará localmente en cada punto de ésta, según una onda plana con la dirección del rayo geométrico refractado en dicho punto. La distribución de amplitud compleja difractada en cada punto del espacio vendrá dada por la superposición del conjunto de dichas ondas planas difractadas.

En el caso de que, sobre la superficie de refracción incida un frente de ondas esférico procedente de una fuente puntual situada en un punto $\vec{X}_0$ del espacio objeto, todo lo expuesto permanecerá válido si en la función de fase definida se hace:

$$\vec{n}_i(\vec{x}_0) = \frac{\vec{x}_0 - \vec{X}_0}{|\vec{x}_0 - \vec{X}_0|}$$

Debido a que para las longitudes de onda ópticas será $k\varnothing \gg 1$, una buena aproximación al valor de la integral se obtendrá mediante el método de fase estacionaria, que dará como resultado para la distribución de amplitud compleja difractada

$$A(\vec{x}) = \tilde{a} \frac{e^{ik\tilde{\varnothing}(\vec{x})}}{\sqrt{\tilde{\varnothing}_{x_0, x_0} \tilde{\varnothing}_{y_0, y_0} - \tilde{\varnothing}_{x_0, y_0}}}$$

siendo

$$\tilde{\varnothing}(\vec{x}) = \varnothing(\vec{x}, \tilde{x}_0(\vec{x}), \tilde{y}_0(\vec{x}))$$

$$\tilde{A}(\vec{x}) = A(\tilde{x}_0(\vec{x}), \tilde{y}_0(\vec{x}))$$

donde $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0(\vec{x})$ y $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0(\vec{x})$ es el punto estacionario determinado por la solución de las ecuaciones

$$\frac{\partial \varnothing(\vec{x}; \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)}{\partial \tilde{x}_0} = 0$$

$$\frac{\partial \varnothing(\vec{x}; \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)}{\partial \tilde{y}_0} = 0$$

y $\tilde{\varnothing}_{x_0, x_0}$, $\tilde{\varnothing}_{y_0, y_0}$, $\tilde{\varnothing}_{x_0, y_0}$ son las derivadas parciales segundas de $\varnothing(\vec{x}; \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ evaluadas en el punto estacionario.

En la práctica, las regiones de observación que se estudian son lo suficientemente pequeñas como para que $\tilde{A}$ se pueda considerar una constante, aunque en dichas regiones de observación $\tilde{a}(\vec{x})$ efectuará muchas oscilaciones.

La distribución de amplitud compleja presentará una singularidad en los puntos del foco o de la superficie caústica que determina la óptica geométrica, lo cual es de esperar, ya que el método de fase estacionaria equivale a considerar el límite de la óptica geométrica.

b) Método de la función de transmisión

Otro concepto muy útil en óptica es el de la función de transmisión $t(x, y)$ de una

superficie de refracción, que se define como el cociente entre la distribución de amplitud compleja sobre el plano $z = 0$ tangente Σ_0 a la superficie de refracción y la amplitud compleja de la onda incidente sobre dicho plano

$$t(x, y) = [a(r) e^{ik\vec{n}_i \cdot \vec{x}}]_{z=0}$$

por lo que será

$$t(x, y) = -\frac{ik\tilde{A}}{2\pi} \int_{S_0} e^{i(k\beta(\vec{x}_0)\vec{n}_s(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0))} dx_0 dy_0$$

Se deduce que una buena aproximación al valor de la anterior integral para la función de transmisión vendrá dada, según el método de fase estacionaria por la expresión

$$t(x, y) = \left[\tilde{A} \frac{e^{ik\tilde{\theta}(\vec{x})}}{\sqrt{\tilde{\theta}_{x_0, x_0} \tilde{\theta}_{y_0, y_0} - \tilde{\theta}_{x_0, y_0}^2}} \right]_{z=0}$$

Para un medio sin absorción, la función de transmisión verificará la condición

$$|t(0, 0)| = 1$$

Observamos que la función de transmisión $t(x, y)$ depende de la dirección $\vec{n}_i$ del frente de ondas incidente. Cuando la dirección del frente de ondas incidente es muy próxima a la normal de la superficie, de forma que sea $\vec{n}_s \cdot \vec{n}_i \approx 1$, entonces valdrá la llamada aproximación paraxial

$$t(x, y) = e^{ik(n-1)z(x, y)}$$

donde $z = z(x, y)$ es la ecuación de la superficie.

La anterior ecuación es idéntica a la función de transmisión que define el método de la función espesor, que ha sido el que habitualmente se ha venido utilizando en la óptica de Fourier para los sistemas de ópticos de lentes.

Sin embargo, el método de la función espesor para el cálculo de la función de transmisión no es aplicable cuando la dirección del frente de ondas incidente es muy diferente de la normal a la superficie, ya que entonces conduciría a resultados en contradicción con los predichos por la teoría de rayos de la óptica geométrica, debiéndose en estos casos aplicar la anterior expresión para la función de transmisión.

Denominamos plano de observación Σ' a un plano paralelo al de transmisión Σ_0 que supondremos situado a una distancia d de este. Se toma el origen de coordenadas O sobre el plano de observación Σ' , en el punto de intersección de dicho plano con la recta

$$\vec{x} = \mu \vec{n}_{x_0}$$

siendo:

$$\vec{n}_{x_0} = (np_i, nq_i, 1 - n^2 p_i^2 - n^2 q_i^2)$$

y μ es un parámetro.

Se escoge la dirección de los ejes de coordenadas (ξ, η) en el plano de observación Σ de forma que sean paralelos a los ejes (x, y) del plano de transmisión Σ_0 .

En el caso de que el sistema tenga una apertura finita, la principal contribución a la distribución de amplitud compleja se producirá en el entorno de la recta $\vec{x} = \mu \vec{n}_{x_0}$, y por tanto, en un entorno del origen O' del plano de observación Σ .

De acuerdo con la teoría de difracción de Rayleigh-Sommerfeld, la distribución de amplitud compleja difractada será

$$a(\xi, \eta) = - \frac{ik \sqrt{1 - n^2(p_i^2 + q_i^2)} e^{ik(s - \xi p_i - \eta q_i)}}{2\pi s} \int_{\Sigma} t(x + \xi, y + \eta) e^{i \frac{k}{2s}(x^2 + y^2 - (np_i + nq_i)^2)} dx dy$$

siendo

$$s = \frac{d}{\sqrt{1 - n^2(p_i^2 + q_i^2)}}$$

y la integral se extiende sobre la apertura del sistema.

c) Método de la eikonal

La función eikonal óptica ofrece un método alternativo para la determinación de la distribución de amplitud compleja transmitida por una superficie de refracción.

Puesto que las longitudes de onda ópticas $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ son del orden de 10^{-4} cm, las soluciones de la ecuación para la distribución de amplitud compleja tienen un comportamiento asintótico para pequeñas longitudes de onda de la forma:

$$a(\vec{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{ik_0 S(\vec{x})}}{(ik_0)^m} B_m$$

Introduciendo la anterior expresión en la ecuación de Helmholtz, se comprueba que en primer orden se deberá verificar

$$B_0 \nabla^2 S + 2 \vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla} B_0 = 0$$

donde $S(\vec{x})$ es la función eikonal.

Se deduce que la distribución de amplitud compleja geométrica vendrá dada por

$$a(\vec{x}(s)) = B_0(\vec{x}_0) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^s ds \nabla^2 S(\vec{x}(s)) e^{ik_0 S(\vec{x}(s))} \right)$$

siendo

$$\vec{x}(s) = \vec{x}_0 + s \vec{\nabla} S$$

donde $\vec{x}_0$ es un punto de la superficie S_0 de refracción.

Para una superficie de refracción iluminada por una onda plana de amplitud unidad, será $B_0(\vec{x}_0) = 1$.

Observemos que la distribución de amplitud compleja geométrica está determinada totalmente por la función eikonal.

En un principio la eikonal podría ser determinada considerando que debe ser la solución de la ecuación en derivadas parciales de primer orden, con las condiciones de contorno de que sea continua a través de la superficie de refracción S_0

$$S_0(\vec{x}_0^-) = S_0(\vec{x}_0^+)$$

y de que verifique la ley de Snell debido a la discontinuidad del índice de refracción en S_0

$$\vec{n}_s(\vec{x}_0) \wedge (\vec{\nabla} S_0(\vec{x}_0^-) - \vec{\nabla} S_0(\vec{x}_0^+)) = 0$$

donde $\vec{x}_0^-$ y $\vec{x}_0^+$ expresan que el punto $\vec{x}_0$ es aproximado por el espacio objeto o imagen respectivamente.

En general, es inabordable tratar de resolver analíticamente la anterior ecuación para una superficie de refracción arbitraria.

Un método alternativo para determinar la eikonal es el siguiente. Supongamos que el punto de observación $\vec{x}$ se encuentra situado sobre la superficie del frente de ondas definido por la ecuación $S(\vec{x})$; entonces se podrá escribir

$$n_2 \emptyset(\vec{x}; p, q) = C + n_2 \overline{PQ}$$

donde P es el punto de la intersección del rayo refractado en la dirección (p, q, r) con la superficie del frente de ondas $S(\vec{x}) = C$.

Se deduce que la función de fase $\emptyset$ será estacionaria cuando sea $\overline{PQ} = 0$ y el punto $\vec{x}$ se encuentre sobre el rayo refractado, siendo entonces

$$S(\vec{x}) = n_2 \tilde{\emptyset}(\vec{x})$$

donde $\tilde{\emptyset}(\vec{x})$ designa el valor estacionario de la función de fase.

La eikonal $S(\vec{x})$ también puede ser identificada también con la superficie envolvente de

la función de fase $\emptyset$ respecto de las coordenadas x_0, y_0 de la superficie de refracción.

Por tanto, la anterior ecuación representa un método alternativo para determinar la eikonal $S(\vec{x})$ sin tener que resolver la ecuación en derivadas parciales con las condiciones de contorno.

Para pequeñas longitudes de onda, como sucede con las longitudes de onda ópticas, la distribución de amplitud difractada por una superficie de refracción está determinada totalmente por la función eikonal S .

Si incide un frente de ondas plano o esférico, la función eikonal puede ser identificada con el valor estacionario de la función de fase, reduciéndose el problema de la determinación de la eikonal y de la distribución de amplitud difractada a la resolución de un conjunto de ecuaciones algebraicas.

Los tres anteriores métodos son diferentes, aunque equivalentes, para la determinación de la distribución de amplitud compleja transmitida por una superficie de refracción que separa dos medios con distintos índices de refracción, cuando ésta es iluminada con un frente de ondas plano o esférico.

Para las longitudes de onda ópticas, la distribución de amplitud compleja difractada viene dada con un suficiente grado de aproximación por las anteriores ecuaciones.

Propagación en medios dieléctricos no homogéneos. Función de transmisión óptica

Durante los últimos años se ha estudiado con un creciente interés las posibilidades de transmisión óptica de información a través de guías de onda formadas por medios dieléctricos.

La transmisión de impulsos ópticos modulados a través de fibras, ha sido el sistema de comunicación óptica que ha suscitado mayor interés hasta el momento presente.

Son bien conocidas también desde hace bastante tiempo las aplicaciones de los medios con gradiente de índice en el diseño de lentes planas, así como a la transmisión de ondas de radio en la atmósfera.

Basándose en la óptica geométrica o el análisis modal, se sabe que, en principio, es posible también transmitir una imagen paraxial a través de un medio dieléctrico con una dependencia radial cuadrática.

Las características del proceso de difracción determinan la calidad de transmisión óptica a través de tales medios, por lo que es importante conocer la función de transmisión a través de un medio con un índice de refracción variable.

El método más adecuado para estudiar analíticamente el proceso de transmisión óptica de imágenes a través de medios dieléctricos no homogéneos, es el método de las funciones de Green, que presenta notables ventajas sobre el análisis modal o el método de rayos, que son los que habitualmente se vienen considerando al permitir dicho método obtener la distribución de amplitud compleja y la intensidad del campo en cada punto del espacio mediante una expresión analítica.

Para el estudio de la transmisión de imagen a través de medios dieléctricos no homogéneos se supone que se verifican la aproximación escalar para el campo electromagnético.

Consideremos en primer lugar un medio dieléctrico no homogéneo arbitrario. La ecuación de propagación de un campo electromagnético monocromático en un medio dieléctrico no homogéneo, vendrá dado por las soluciones de las ecuaciones de ondas

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} + n^2 k^2 \vec{E} &= -\vec{\nabla} (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} (L_n n^2)) \\ \nabla^2 \vec{B} + n^2 k^2 \vec{B} &= -\vec{\nabla} (L_n n^2) \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{B}\end{aligned}$$

siendo

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

donde $n(\vec{x})$ es el índice de refracción.

Si la variación relativa del índice de refracción en distancias de la longitud de onda es muy pequeña

$$\frac{\lambda}{n} |\vec{\nabla} n| \ll 1$$

como es en el caso de las longitudes de onda ópticas, entonces las componentes del campo electromagnético estarán desacopladas y verificarán cada una de ellas la ecuación escalar de Helmholtz

$$\nabla^2 A(\vec{x}) + k^2 n^2(\vec{x}) A(\vec{x}) = 0$$

Debido a las altas frecuencias ópticas, la magnitud de mayor interés en óptica será la intensidad I , definida como el promedio en el tiempo de la energía que cruza la unidad de área conteniendo los vectores eléctrico y magnético en la unidad de tiempo $I = \langle \vec{E} \wedge \vec{H} \rangle$.

De lo anteriormente expuesto, se deduce que la intensidad I será proporcional al módulo al cuadrado $|A|^2$ de una determinada función escalar compleja $A(\vec{x})$, la cual verifica la ecuación de Helmholtz.

Puesto que en la práctica, solo interesa la distribución relativa de intensidad, se puede

limitar al estudio de la función escalar $A(\vec{x})$, denominada habitualmente como distribución de amplitud compleja.

La distribución de amplitud compleja se propagará a través del medio dieléctrico, de acuerdo con la ecuación

$$A(x, y; z) = \int_S \tilde{T}(x, y; x', y'; z) A_0(x', y') dx' dy'$$

donde $\tilde{T}(x, y; x', y'; z)$ es el propagador de la ecuación de Helmholtz definido por la ecuación

$$\nabla^2 \tilde{T} + k^2 n^2(\vec{x}) \tilde{T} = 0$$

con la condición de contorno

$$\tilde{T}(x, y; x', y'; 0) = \delta(x - x', y - y')$$

$A_0(x', y')$ es la distribución de amplitud compleja sobre el plano $z = 0$, correspondiente a la imagen que se va a transmitir.

Si el índice de refracción tiene una variación suficientemente lenta $\frac{\Delta n}{n} \ll 1$ y la dirección de propagación del frente de ondas es próxima al eje z , entonces se verifica la relación

$$k \frac{\partial \theta}{\partial z} \gg \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \ll k^2 \theta$$

que define las condiciones de validez de la aproximación paraxial. En este caso se simplifica generalmente la resolución de la ecuación para la función de transmisión.